А. М. Молчанов

ОБ ЭВОЛЮЦИИ ПЛАНЕТНЫХ СИСТЕМ

§ 1. В статье выводятся уравнения, описывающие медленные изменения параметров орбит и не содержащие быстрых переменных, связанных с движением по орбитам. Выясняется, что плоские круговые орбиты являются стационарными (в главном члене). Это наводит на мысль, что даже неплоская система в начале должна стать плоской в процессе эволюции. Но диссипативные факторы, необходимые для эволюции, не содержатся, формально говоря, в уравнениях небесной механики. Тут на помощь приходит следующее соображение. Уже в рамках небесной механики возможен распад системы, когда часть планет переходит на гиперболические орбиты и покидает систему. Таким образом, возможность эволюции (правда, за счет распада) заключена уже в уравнениях небесной механики. Следует также учесть, что на больших временах даже малые диссипативные факторы (например, приливные явления на Солнце) могут играть существенную роль.

Мыслима, поэтому, следующая схема. Уравнения небесной механики определяют возможные стационарные состояния планетной системы — плоские круговые орбиты. Однако выход на эти состояния обеспечивается малыми диссипативными факторами. Возникает интересная задача систематического перечисления всех диссипативных явлений. Возможно, конечно, что все они слишком малы, чтобы обеспечить выход на стационарный режим за время существования солнечной системы. Тогда остается альтернативная возможность — солнечная система плоская потому, что она была такой с момента возникновения.

Как уже говорилось выше, при изучении эволюции можно обойтись и без пересмотра основных уравнений, если рассматривать системы, способные к распаду. Этот вопрос интересен и сам по себе, так как может найти применение в задаче о распаде звездных ассоциаций.

§ 2. Теорема о разделении движений. Все дальнейшее изложение основано на теореме из теории колебаний, которая

Проблемы движения искусственных небесных тел.
М.: Изд-во АН СССР, 1963.

формулируется ниже. Доказательство за недостатком места не приводится.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, содержащую малый параметр ε:

$$\frac{dJ}{dt} = \varepsilon F(J, \Phi, \varepsilon),$$
$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega(J) + \varepsilon\Omega(J, \Phi, \varepsilon). \tag{1}$$

Здесь $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ — угловые переменные (функции F и Ω периодичны по Φ с периодом 2π), $J = (J_1, \ldots, J_n)$ — система первых интегралов невозмущенного движения.

Теорема о разделении движений для такой системы формулируется следующим образом:

Существует замена переменных

$$J = I + \varepsilon P(I, \Phi, \varepsilon), \tag{2}$$

такая, что уравнения для I не содержат фазовых) переменных:

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon G(I, \varepsilon). \tag{3}$$

В настоящее время автор владеет доказательством этой теоремы не в полном объеме, а при некоторых ограничивающих предположениях.

Самое существенное ограничение (кроме предположений гладкости, которые не очень важны) состоит в том, что пока теорема доказана для окрестности неособой точки I. Более точно: рассмотрим среднее значение функции F при $\varepsilon = 0$:

$$F_0(I) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} F(I, \Phi, 0)\,d\Phi_1\ldots d\Phi_n. \tag{4}$$

Теорема доказана для любой точки I такой, что $F_0(I) \neq 0$. Правда, в этом случае удается дополнительно доказать — и это очень важно для приложений — что главный член эволюционного уравнения совпадает с $F_0(I)$:

$$G(I, 0) = F_0(I)$$

Заметим, что из формулы (4) видно, почему обычный метод усреднения нельзя распространить на многочастотные колебания. Дело в том, что обычно рассматривается среднее по траектории, которое, согласно эргодической теореме, совпадает со средним по пространству только в точках, где частоты несоизмеримы. Поэтому временно́е среднее, в отличие от пространственного (4), является разрывной функцией I во всех точках I, где частоты соизмеримы, т. е. на всюду плотном множестве.

Относительно функции P в формуле (2) автору удалось пока доказать только весьма грубую оценку:

$$|P(I, \Phi, \varepsilon)| \leqslant \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{6}$$

Такая оценка разумна в окрестности стационарной резонансной точки I и должна быть заменена просто ограниченностью P в любой другой точке.

Тем не менее даже оценка (6) показывает, что проблема малых знаменателей в теории колебаний (в частности, в небесной механике) возникает из-за неудачной формы теории возмущений — разложения в ряд по степеням малого параметра ε.

Это разложение имеет смысл при ограниченных временах, а на временах $t \sim 1/\varepsilon$ или, тем более, $t \sim 1/\varepsilon^2$ процедура разложения в ряд по степеням ε равнозначна разложению в степенной ряд функции, имеющей существенную особенность. Если же использовать разумный метод последовательных приближений, то малые знаменатели не возникают. Это видно особенно ясно, если написать уравнение в частных производных, определяющее функцию P:

$$\frac{\partial P}{\partial \Phi}[\omega(I + \varepsilon P) + \varepsilon\Omega] + \varepsilon\frac{\partial P}{\partial I}G(I, \varepsilon) = F(I + \varepsilon P, \Phi, \varepsilon) - G(I, \varepsilon).$$

Если откинуть все члены, содержащие ε, то получается первое приближение обычной теории возмущений и возникает проблема малых знаменателей. Но достаточно сохранить член, содержащий $\frac{\partial P}{\partial I}$, заменив в нем коэффициент $G(I, \varepsilon)$ на $F_0(I)$ [согласно (5)], как проблема малых знаменателей исчезает. Она сказывается лишь в том, что получается сравнительно грубая оценка (6).

Еще одно замечание терминологического характера. Систему (3) естественно называть «эволюционной» по отношению к системе (1), так как она описывает медленные изменения, происходящие со скоростью ε. Смысл формулы (2) состоит в том, что она показывает, как ведут себя интегралы J

невозмущенного движения при включении возмущения. Выясняется, что на плавный ход эволюционных параметров I (на временах $t \sim 1/\varepsilon$) накладывается дрожание малой амплитуды εP, но высокой частоты, так как в P входят быстрые переменные Φ.

Следует подчеркнуть, что применение теоремы о разделении движений сводит исследование системы (1) к исследованию системы (3), которая имеет меньшую размерность, так как в нее не входят фазовые переменные Φ. Если ввести «медленное» время $\tau = \varepsilon t$, то эволюционную систему (3) можно записать, учитывая равенство (5) в виде:

$$\frac{dI}{dt} = F_0(I) + \varepsilon G_1(I, \varepsilon). \tag{7}$$

Эта система, как и исходная, содержит малый параметр ε. Ее поведение определяется, поэтому, членом $F_0(I)$, во всяком случае на временах порядка $\tau \sim 1$, что соответствует $t \sim 1/\varepsilon$.

Напишем «невозмущенное» уравнение для системы (7):

$$\frac{dI}{dt} = F_0(I). \tag{8}$$

Система (8) может иметь, вообще говоря, устойчивые стационарные точки. Пусть I_0 такая точка. Тогда любая траектория из достаточно малой окрестности I_0 с течением времени будет стремиться к I_0. Эволюция системы в этом случае заключается в том, что система стремится к стационарному режиму.

Далее, может случиться, что к пределу стремится только часть параметров, составляющих I, а другая часть или даже все параметры совершают почти периодическое движение. Взяв в качестве новых переменных систему первых интегралов и фазовых переменных уравнения (8), мы приведем в этом случае систему (7) к виду (1), но уже с меньшим числом переменных.

Теорема о разделении движений позволяет, таким образом, в принципе за конечное число шагов либо найти стационарный режим, к которому эволюционирует система, либо представить ее движение в виде наложения почти периодических движений, происходящих с резко различными скоростями 1, ε, ε^2,..., соответствующими масштабам времен 1, $1/\varepsilon$, $1/\varepsilon^2$,...

Заметим, что число шагов в этом процессе не больше размерности системы, так как на каждом шаге хотя бы одно переменное выходит из игры либо за счет стремления к пределу, либо за счет усреднения.

Важно отметить, что характер эволюционного уравнения определяется членом $F_0(I)$, отыскание которого не требует знания замены переменных (2). Заметим также, что для теоремы о разделении движений существенно только то, что переменные Φ образуют эргодическое множество при почти всех I. В этом более общем случае достаточно вместо формулы (4) написать ее естественное обобщение:

$$F_0(I) = \int\limits_{\mathfrak{M}(I)} F(I,\ \Phi,\ 0)\, d\mu(\Phi). \tag{9}$$

где $\mu(\Phi)$ означает инвариантную меру на эргодическом множестве $\mathfrak{M}(I)$.

Если, однако, первый шаг не выявляет эволюционирующих параметров, то прежде чем сделать следующий шаг, необходимо найти замену переменных, что требует решения уравнения в частных производных. Довольно существенное уменьшение работы приносит при этом следующее соображение. Замену переменных нет необходимости искать точно, достаточно найти ее с точностью ε^2 на первом шаге, ε^3 — на втором и т. д.

§ 3. **Задача о планетной системе.** Нетрудно проверить, что при надлежащем выборе единиц измерения, уравнения движения системы n планет могут быть записаны (в гелиоцентрической системе координат) следующим образом:

$$\begin{gathered} \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = -\frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} + \varepsilon \sum_{k \neq i} \theta_k \left[\frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^3} - \frac{\mathbf{r}_k}{r_k^3} + \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} \right], \\ \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{u}_i. \end{gathered} \tag{10}$$

Здесь малым параметром является число ε

$$\varepsilon = \frac{m_1 + \cdots + m_n}{m_0 + m_1 + \cdots + m_n} \tag{11}$$

— отношение массы всех планет к полной массе системы (m_0 — масса центрального тела), а

$$\theta_k = \frac{m_k}{m_1 + \cdots + m_n} \tag{12}$$

— доля k-й планеты в общей массе всех планет.

Отметим, что для солнечной системы

$$\varepsilon = 1{,}34 \cdot 10^{-3},$$

а для системы спутников Юпитера

$$\varepsilon = 4{,}6 \cdot 10^{-5}.$$

Для того чтобы к системе (10) можно было применить теорему о разделении движений (§ 2), уравнения надо написать в новых переменных. В качестве таких переменных удобно выбрать удельные моменты количества движения планет и векторы, направленные в перицентры орбит. Дополнив эту систему первых интегралов невозмущенного движения фазовыми переменными, мы получим возможность привести систему (10) к виду (1).

Приведем для справок формулы перехода к новым переменным (буква без черты означает длину соответствующего вектора):

$$\begin{gathered}
\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{u}_i, \\
\mathbf{a}_i = \left(u_i^2 - \frac{1}{r_i} \right) \mathbf{r}_i - (\mathbf{r}_i,\ \mathbf{u}_i)\,\mathbf{u}_i, \\
\cos\varphi_i = \frac{1}{r_i a_i}\,(\mathbf{r}_i,\ \mathbf{a}_i).
\end{gathered} \tag{13}$$

Следует заметить, что $\mathbf{L}_i$ и $\mathbf{a}_i$ связаны соотношением $(\mathbf{L}_i, \mathbf{a}_i) = 0$. Поэтому величины $\mathbf{L}_i$, $\mathbf{a}_i$, φ_i для каждого индекса i образуют шесть (а не семь!) независимых величин, что позволяет выразить через них взаимно-однозначно шесть величин $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{u}_i$. Обратный переход осуществляется по формулам:

$$\begin{gathered}
\mathbf{r}_i = r_i\,[\cos\varphi_i \bar{\alpha}_i + \sin\varphi_i \bar{\beta}_i], \\
\mathbf{u}_i = \frac{1}{L_i}\left[-\sin\varphi_i \bar{\alpha}_i + (a_i + \cos\varphi_i)\,\bar{\beta}_i \right].
\end{gathered} \tag{14}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{gathered}
r_i = \frac{L_i^2}{1 + a_i \cos\varphi_i}, \\
\bar{\alpha}_i = \frac{1}{a_i}\,\mathbf{a}_i, \\
\bar{\beta}_i = \frac{1}{L_i a_i}\,(\mathbf{L}_i \times \mathbf{a}_i).
\end{gathered} \tag{15}$$

Выписывать полностью систему уравнений в новых переменных не имеет смысла, так как нас будут интересовать только эволюционные уравнения. Напишем поэтому уравнения только для величин $\mathbf{L}_i$, $\mathbf{a}_i$, которые и составляют вектор J для нашего случая. Можно проверить, что эти уравнения имеют вид:

$$\frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \varepsilon(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i), \tag{16}$$

$$\frac{d\mathbf{a}_i}{dt} = \varepsilon\,[2(\mathbf{u}_i,\ \mathbf{F}_i)\,\mathbf{r}_i - (\mathbf{r}_i,\ \mathbf{F}_i)\,\mathbf{u}_i - (\mathbf{r}_i,\ \mathbf{u}_i)\,\mathbf{F}_i]. \tag{17}$$

Здесь введены обозначения:

$$\mathbf{F}_i = \sum_{k \neq i}{}' \theta_k \mathbf{F}_{ki},$$
$$\mathbf{F}_{ki} = \frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^3} - \frac{\mathbf{r}_k}{r_k^3} + \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} \tag{18}$$

и подразумевается, что величины $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{u}_i$ должны быть выражены через $\mathbf{L}_i$, $\mathbf{a}_i$, φ_i по формулам (14).

Наша задача состоит в изучении поведения системы на больших временах. Уточним несколько неопределенное выражение «большие времена». Как уже говорилось в § 2, наличие малого параметра порождает несколько масштабов времен. Можно говорить о временах порядка одного оборота. На таких временах поправки порядка ε малы и не играют никакой роли. На временах порядка $1/\varepsilon$ поведение системы определяют именно малые члены порядка ε, но могут быть откинуты члены порядка ε^2 и выше. Если обратиться к примеру солнечной системы, для которой $\varepsilon \sim 10^{-3}$, то получается, что времена порядка $1/\varepsilon$ — это тысячи оборотов Юпитера вокруг Солнца, т. е. десятки тысяч лет. Правдоподобно, что при рассмотрении времен порядка $1/\varepsilon$ и $1/\varepsilon^2$ еще имеет смысл ограничиваться уравнениями небесной механики. Но уже времена порядка $1/\varepsilon^3$ сравнимы с возрастом солнечной системы и, следовательно, небесно-механическое приближение заведомо недостаточно. Любопытно, что релятивистские поправки к движению Юпитера становятся существенными также на временах порядка $1/\varepsilon^3$. Любые другие факторы, не учтенные при выводе уравнений небесной механики (протяженность планет, приливные силы, магнитные поля и т. д.), следует включать в рассмотрение в том порядке, в котором они становятся существенными. Стоит отметить, что теорема о разделении движений (§ 1) позволяет учесть все такие факторы, независимо от их происхождения, если только известно выражение сил через положения и скорости планет.

Независимо от того, какие члены учитывать в следующих порядках теории возмущений, первый шаг должен быть сделан целиком в рамках небесной механики. Установим некоторые свойства эволюционного уравнения в первом порядке теории возмущений. Из сказанного выше в § 2 видно, что для вывода эволюционного уравнения правую часть исходной системы надо усреднить по инвариантной мере. Можно проверить, что в нашем случае инвариантная мера задается произведением дифференциалов средних аномалий или, если выразить через истинные аномалии, формулой:

$$d\mu = r_1^2 r_2^2 \dots r_n^2 \, d\varphi_1 \, d\varphi_2 \dots d\varphi_n. \qquad (19)$$

Первый результат, который заслуживает быть отмеченным, состоит в том, что при осреднении уравнений (16) и (17) в величинах $\mathbf{F}_{kl}$ можно оставить только первое слагаемое, ибо два других дают при усреднении нуль. Это особенно ясно по отношению к слагаемому $\mathbf{r}_k/r_k^3$, так как после умножения на $r_k^2 \, d\varphi_k$ получается $(\mathbf{r}_k/r_k)\, d\varphi_k$. Это выражение при интегрировании по периоду дает нуль, что легко видно из формулы (14). Несколько сложнее проверить, что слагаемое $\mathbf{r}_l/r_l^3$ также можно выкинуть. Выкладки опущены ввиду их совершенно элементарного характера.

С учетом этого замечания эволюционная система может быть записана совершенно так же, как и система (16), (17). Нужно только иметь в виду, что в правые части вместо $\mathbf{F}_{kl}$ можно подставить выражения:

$$\mathbf{F}_{kl}^{*} = \frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|^3}, \qquad (20)$$

после чего эти правые части должны быть усреднены по переменным $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ с весом, определяемым формулой (19).

После того как уравнения выведены, можно доказать следующую важную теорему:

Если все моменты $\mathbf{L}_l$ параллельны, а эксцентриситеты равны нулю, то правые части эволюционных уравнений (в первом порядке) также равны нулю.

Это утверждение тоже доказывается сравнительно простыми выкладками, поэтому доказательство опущено.

Легко понять, что это утверждение означает важный эволюционный факт:

Плоские круглые планетные системы являются стационарными в первом порядке по ε.

В заключение заметим, что на современных вычислительных машинах эволюционные уравнения можно без труда проинтегрировать для случая нескольких планет.

4 Зак. № 5331